E.N.S.E.T. Section A3 (Programme C) 1977

MATHEMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Les candidats peuvent utiliser du papier millimétrique (2 feuilles).

PREMIER PROBLÈME

Dans tout le problème, f désigne une fonction numérique d'une variable réelle définie et continue dans un intervalle I contenant zéro. On définit les fonctions $f_1, f_2, \ldots f_n$ par

$$f_1(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \qquad f_2(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt, \qquad \ldots, \qquad f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt$$

(n entier naturel).

I

1° On désigne par $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues sur I et on définit l'application φ qui à toute fonction f de $\mathcal{F}$ fait correspondre $\varphi(f) = f_n$. Montrer que φ est une application de $\mathcal{F}$ dans lui-même. φ est-elle une application linéaire ?

2° k est un réel positif donné. On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = x^k$ pour x strictement positif et $f(0) = 0$. Déterminer $f_n(x)$.

Déterminer la limite de $f_n(x)$ quand n tend vers plus l'infini, x étant fixé.

3° f est la fonction numérique définie par $f(x) = e^{rx}$, (r est un réel). Donner l'expression de $f_n(x)$.

En supposant $r \geqslant 1$, déterminer la limite de $f_n(x)$ quand n tend vers plus l'infini, x étant fixé.

4° Sachant que $f(x) = \operatorname{sh} x$, déterminer $f_{2p}(x)$ (p entier naturel). x étant fixé, déterminer la limite de $f_{2p}(x)$ quand p tend vers plus l'infini.

5° Existe-t-il une fonction f telle que $f_2 = f$?

6° On suppose que $f(0) = a_0$ avec $a_0 \neq 0$. Montrer que $f_n(x)$ est un infiniment petit avec x et en donner la partie principale.

II

On considère l'application g définie sur l'intervalle $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ telle que

$$g(x) = \operatorname{Arc\,cos}(1 - x^2)$$

1° L'application g est-elle dérivable sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Tracer le graphique de g dans le plan muni d'un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

2° Montrer qu'il existe deux fonctions polynômes A et B de degré au plus égal à deux telles que, les fonctions g' et g'', dérivée première et seconde de g vérifient $Ag'' + Bg' = 0$, dans certains intervalles.

.../...

3° On considère l'équation différentielle (E) :

$$Ay'' + By' = 0$$

dans laquelle A et B sont les fonctions polynômes précédentes.

Intégrer l'équation différentielle (E). On pourra poser $z = y'$.

4° On considère la fonction impaire u dont le développement en série entière de x sur un intervalle centré à l'origine est :

$$u(x) = \sqrt{2}\,x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \ldots + a_{2p+1} x^{2p+1} + \ldots$$

Déterminer les coefficients réels a_3 , a_5 , et a_{2p+1} de façon que u soit solution de l'équation (E). Préciser son intervalle de convergence.

Si $f = u$, donner les développements en série entière des fonctions f_1 , f_2 , f_n .

Quels sont leurs intervalles de convergence ?

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans le plan euclidien orienté muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, on considère le cercle (C) de centre O, de rayon 1. Soit M le point du cercle tel qu'une mesure de l'angle ($\vec{i}$, $\overrightarrow{OM}$) soit égale à θ et soit Q la projection orthogonale de M sur $y'Oy$. A tout réel θ on associe le point P de coordonnées $(\cos\theta, f(\theta))$. On désigne par Γ_f la courbe de représentation paramétrique

$$x = \cos\theta \qquad y = f(\theta) \qquad \theta \in \mathbb{R} \ .$$

1° Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la droite QP soit tangente à Γ_f au point P pour tout θ, est que la fonction f soit solution de l'équation différentielle

(E) $$y' \cos\theta + y \sin\theta = \sin^2\theta .$$

2° Déterminer parmi les solutions de (E) celle pour laquelle la courbe Γ_f correspondante passe par le point de coordonnées (1, 0) pour $\theta = 0$. On désigne dans toute la suite cette courbe par Γ.

3° Déterminer les points stationnaires de Γ (points pour lesquels $x' = 0$ et $y' = 0$) et montrer que les tangentes en ces points passent par un point fixe qu'on déterminera.

4° Tracer l'arc de courbe de Γ correspondant à $\theta \in \left[-\frac{5\pi}{2} , \frac{5\pi}{2} \right]$.

5° Pour $\theta \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, calculer le rayon de courbure de Γ en un point M de Γ. Déterminer une équation que vérifie nécessairement θ pour qu'au point M le rayon de courbure présente un extremum sur $]0, \pi[$. Montrer qu'il existe dans cet intervalle un tel point M unique.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail